Capítulo 8: Producción en el tiempo.

- Mezclamos 2 ingredientes que hemos visto:
  1. modelo estático de producción y consumo
  2. modelo dinámico de intercambio intertemporal.

- Individuos escogen: consumo, ocio y ahorro
- trabajo es el único factor de producción: $f(l) = A l^{1-\alpha}$
- No hay capital ⇒ rendimientos decrecientes a escala.
  ⇒ empresas tienen ganancias positivas.
- Hogares pueden comprar y vender acciones para transferir renta o consumo a través del tiempo.
- Dueño de una acción puede conservarla y recibir todo el flujo futuro de dividendos o venderla a cambio de consumo presente.
- Modelo nos da una teoría de los precios de las acciones.

- Empezamos con una versión simplificada del modelo.

Horizonte finito con producción propia.

- Cada individuo es dueño de su empresa familiar.
- No hay mercado laboral: cada individuo aporta su esfuerzo laboral a la empresa familiar.
- Individuo es el único dueño y trabajador de su empresa.
- Ingreso del individuo es el valor de la producción total de su empresa: $p \cdot y^*$.

~~• Recordemos que valor total de la producción de la firma $p \cdot y^*$ se divide entre: - Remuneración al trabajo~~
~~- ganancias~~
~~Con cobb douglas: - Remuneración al trabajo: $(1-\alpha)y^*$~~
~~- Ganancias: αy^*~~

• Individuo participa en mercados de bienes y financiero.

Decisiones óptimas de los individuos:

• Economía está poblada por I individuos que viven T períodos.

• Individuos consumen: - ocio
- bien final que cada individuo produce operando su propia tecnología/empresa.

• función de utilidad: $\underbrace{u_i(h_1, h_2, \dots, h_T, c_1, \dots, c_T)}_{2T \text{ argumentos.}}$

• Preferencias CES:

en modelo de intercambio: c_t

$$u_i(h_1,\dots,h_T, c_1,\dots,c_T) = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} \frac{u_i(h_t,c_t)^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

$$u_i(h_t,c_t) = \left(\gamma h_t^{1-\frac{1}{\vartheta}} + c_t^{1-\frac{1}{\vartheta}}\right)^{\frac{\vartheta}{\vartheta-1}} \longleftarrow \text{función CES.}$$

σ: elasticidad de sustitución intertemporal.
Caso Cobb-Douglas es $\sigma = 1$.

ϑ: elasticidad de sustitución intratemporal entre ocio y consumo.
Si $\vartheta \to \infty \Rightarrow u_i(h_t,c_t) = \gamma h_t + c_t \longrightarrow$ lineal

$\Rightarrow c_t$ y h_t son sustitutos perfectos.

Si $\nu \to 0 \Rightarrow u_i(h_t, c_t)$ tiende a leontieff

$\Rightarrow c_t$ y h_t son complementos perfectos

Si $\nu \to 1 \Rightarrow u_i(h_t, c_t)$ tiende a cobb-Douglas:

$$u_i(h_t, c_t) = h_t^{\gamma} c_t$$

Caso que más usamos: $\sigma = \nu = 1 \longrightarrow$ cobb-Douglas

$$U_i(h_1, \dots, h_T, c_1, \dots, c_T) = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} (\gamma \ln h_t + \ln c_t)$$

- Cada empresa familiar tiene una tecnología de producción Cobb-Douglas con TFP A_{it}: productividad total de los factores

$$y_{it} = f_{it}(l_{it}) = A_{it} l_{it}^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

- Individuos pueden acudir al mercado financiero a comprar/vender bonos que pagan una tasa real r_t.

Problema del consumidor:

$$\max \; U_i(h_1, \dots, h_T, c_1, \dots, c_T) \quad \text{s.a.}$$

- $h_t + l_t = H_{it}$ — restricción de tiempo
- $c_t + b_t = \underbrace{f_{it}(l_{it})}_{\text{ingresos del individuo}} + (1+r_{t-1}) b_{t-1}$ — bonos.

Para cada t.

Estas restricciones presupuestales en cada periodo se pueden combinar para obtener una restricción presupuestal inter-temporal:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r_1} + \dots + \frac{C_T}{(1+r_1)\dots(1+r_{T-1})}$$

Restricción presupuestal intertemporal.

$$= f_{i1}(l_1) + \frac{f_{i2}(l_2)}{(1+r_1)} + \dots + \frac{f_{iT}(l_T)}{(1+r_1)\dots(1+r_{T-1})}$$

$l_1 = H_{i1} - h_{i1}$ $\qquad$ $l_2 = H_{i2} - h_{i2}$

Problema: $\max U_i(h_1, \dots, h_T, c_1, \dots, c_T)$ s.a.

$$c_1 + \dots + \frac{c_T}{(1+r_1)\dots(1+r_{T-1})} = \underbrace{f_{i1}(H_{i1}-h_1)}_{\text{en modelo de intercambio: } y_{it}} + \dots + \frac{f_{iT}(H_{iT}-h_T)}{(1+r_1)\dots(1+r_{T-1})}$$

Con función de utilidad CES:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} \frac{\left(\gamma (H_{it}-l_t)^{1-\frac{1}{\sigma}} + C_t^{1-\frac{1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}\cdot\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

$$+ \lambda\left(f_{i1}(l_1) + \dots + \frac{f_{iT}(l_T)}{(1+r_1)\dots(1+r_{T-1})} - C_1 - \dots \frac{C_T}{(1+r_1)\dots(1+r_{T-1})}\right)$$

$[C_t]$: $$\beta^{t-1} \frac{\frac{\sigma}{\sigma-1}\cancel{\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)}\left(\_\_\_\_\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)-1}}{\cancel{1-\frac{1}{\sigma}}} \cdot \left(1-\frac{1}{\sigma}\right) C_t^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$- \frac{\lambda}{(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})} = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta^{t-1}\left(\gamma (H_{it}-l_t)^{1-\frac{1}{\sigma}} + C_t^{1-\frac{1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}\left(1-\frac{\sigma}{\sigma}\right)} C^{-\frac{1}{\sigma}} = \frac{\lambda}{(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})}$$

$[l_t]$:

$$\beta^{t-1}\left(\gamma(H_{it}-l_t)^{1-\frac{1}{\theta}}+C_t^{1-\frac{1}{\theta}}\right)^{\frac{1}{\theta-1}\left(1-\frac{\theta}{\sigma}\right)}\gamma(H_{it}-l_t)^{-\frac{1}{\theta}}$$
$$=\frac{\lambda(1-\alpha)A_{it}\,l_t^{-\alpha}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$

Si $\theta=\sigma=1$:

$[C_t]$: $$\frac{\beta^{t-1}}{C_{it}}=\frac{\lambda}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$

$[l_t]$: $$\frac{\beta^{t-1}\gamma}{H_{it}-l_{it}}=\frac{\lambda(1-\alpha)A_{it}\,l_t^{-\alpha}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$

Al hacer $\frac{[l_t]}{[C_t]}$: $$\underbrace{\left[\frac{\gamma C_t}{H_{it}-l_t}\right]^{\frac{1}{\theta}}=(1-\alpha)A_{it}\,l_t^{-\alpha}}_{\text{Condición de optimalidad intratemporal!}}$$

En equilibrio, la tasa marginal de sustitución entre consumo y ocio debe ser igual a la productividad marginal del trabajo (costo de oportunidad del ocio).

$$C_t=\varphi(l_t):=\frac{H_{it}-l_t}{\gamma}\left((1-\alpha)A_{it}\,l_t^{-\alpha}\right)^{\theta}$$

Al hacer $\frac{[C_t]}{[C_{t+1}]}$:

$$\left[\frac{\gamma(H_{it+1}-l_{t+1})^{1-\frac{1}{\theta}}+C_{t+1}^{1-\frac{1}{\theta}}}{\gamma(H_{it}-l_t)^{1-\frac{1}{\theta}}+C_t^{1-\frac{1}{\theta}}}\right]^{\frac{1}{\theta-1}\left(\frac{\theta}{\sigma}-1\right)}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\frac{1}{\theta}}=\beta(1+r_t)$$

└ condición de eficiencia intertemporal.

Caso Cobb-Douglas ($\vartheta = 1$):

$$\left(\frac{H_{it} - l_t}{H_{it+1} - l_{t+1}}\right)^{\gamma(1-\frac{1}{\sigma})} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \beta(1+r_t)$$

$$\frac{\gamma C_t}{H_{it} - l_{it}} = (1-\alpha) A_{it} (l_{it})^{-\alpha}$$

óptimo.

Si $\sigma = 1 = \vartheta$:

$$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right) = \beta(1+r_t)$$ cond. intertemporal

$$\frac{\gamma C_t}{H_{it} - l_{it}} = (1-\alpha) A_{it} l_{it}^{-\alpha}$$ cond. intratemporal.

- condición intratemporal nos da la relación óptima entre consumo y ocio dentro de un mismo periodo.
- condición intertemporal nos da la relación óptima entre consumos de distintos periodos.

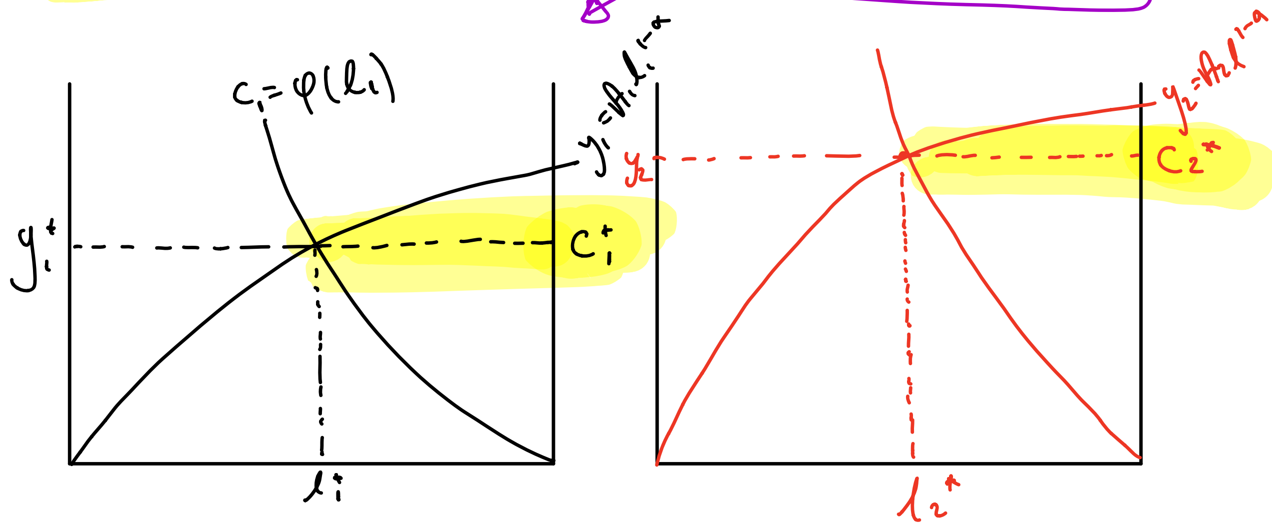
Solución gráfica para $T=2$:

- La solución al modelo dinámico de dos períodos **NO** es igual a la que obtendríamos en el modelo estático.

- Asumamos $\beta(1+r)=1$, $\sigma=\nu=1$:

- $A_2 > A_1$.

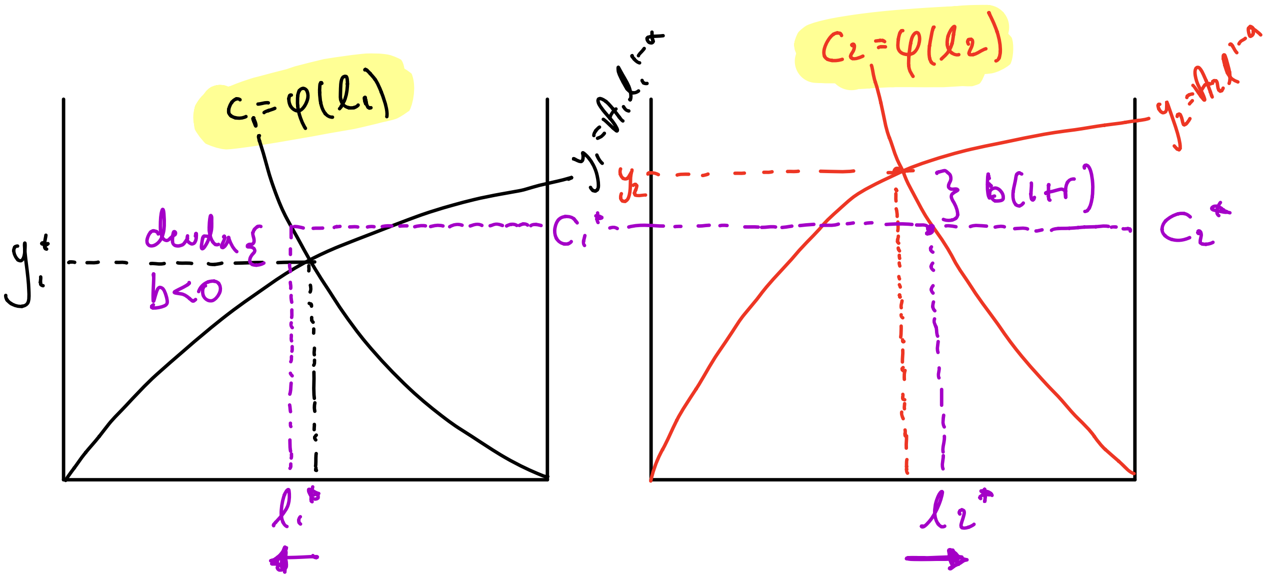
modelo estático.



Si los individuos pueden ahorrar:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t}=\beta(1+r) \longrightarrow \text{cond. intertemporal.}$$

$$\Rightarrow C_{t+1}=C_t \quad \Rightarrow \quad C_2^*=C_1^*.$$

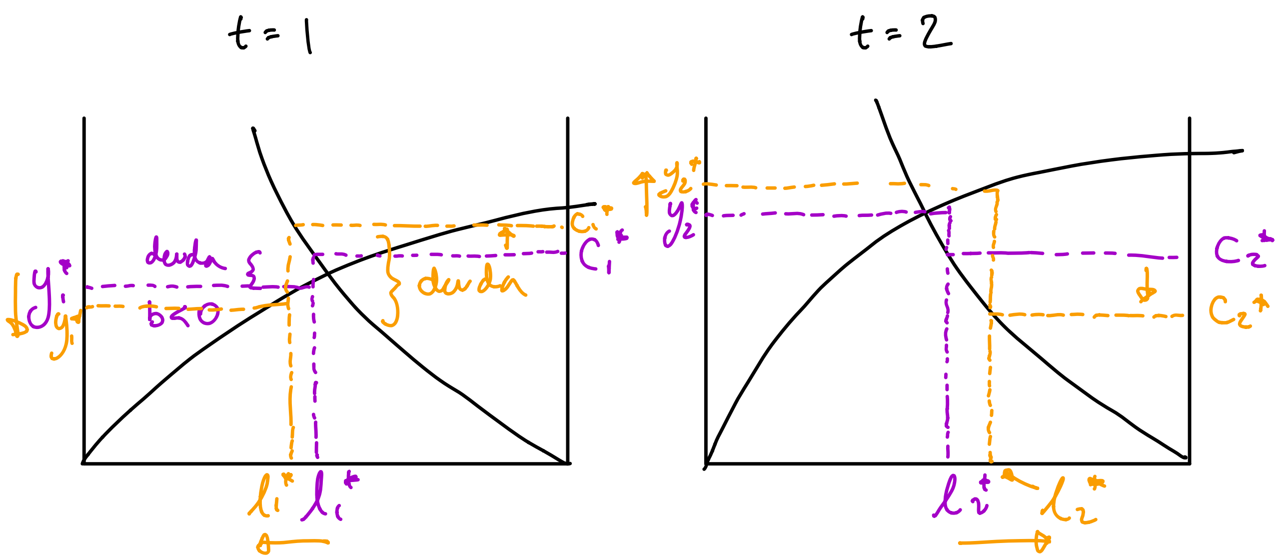


- En modelo dinámico, individuos trabajan menos en el primer periodo (comparado con un modelo estático) y trabajan más en el segundo periodo (comparado con modelo estático).

- En modelo dinámico, individuo consume más de lo que produce en el primer periodo (se endeuda) y menos de lo que produce en el segundo periodo.

Qué ocurre ante cambios en r?

Supongamos que inicialmente $\beta(1+r)=1$. $\Rightarrow C_{t+1} = C_t$



Supongamos que r cae:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1+r) \quad \Rightarrow \quad C_{t+1} < C_t$$

$$C_2^* < C_1^*$$

Caída en r:

- producción en $t=1$ cae
- consumo en $t=1$ aumenta
- deuda en $t=1$ aumenta.
- producción en $t=2$ aumenta
- consumo en $t=2$ cae.

Solución analítica para tecnología lineal:

- Economía vive T periodos
- Tecnología: $y_t = A_t l_t$. $(\alpha = 0)$.

- Condiciones de eficiencia:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta(1+r_t) \longrightarrow \text{intertemporal}$$

$$\frac{\gamma c_t}{H_t - l_t} = A_t \longrightarrow \text{intratemporal.}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{A_t l_t}{(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})} \longrightarrow \text{restricción intertemporal.}$$

$$H_t - l_t = \frac{\gamma c_t}{A_t} \Rightarrow l_t = H_t - \frac{\gamma c_t}{A_t}$$

$$A_t\left(H_t - \frac{\gamma c_t}{A_t}\right) = A_t H_t - \gamma c_t$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{H_t A_t}{(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})} - \sum_{t=1}^{T} \frac{\gamma c_t}{(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{T} \frac{(1+\gamma)\, c_t}{(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{A_t H_t}{(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})}$$

$$c_{t+1} = \beta(1+r_t)\, c_t$$

$$c_t = \beta(1+r_{t-1})\, c_{t-1}$$

$$\vdots$$

$$c_t = \beta^{t-1}(1+r_1)\dots(1+r_{t-1})\, c_1^*$$

$$\boxed{C_1^* = \frac{1}{(1+\gamma)(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{T-1})} \underbrace{\left(\sum_{t=1}^{T} \frac{A_t H_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} \right)}_{\text{Rigeza del individuo en valor presente.}}}$$

$f(l) = Al$